Francesco Lamendola

Nel mondo della matematica tutto è possibile

perché la sua logica ignora l'umana imperfezione

Il fascino che la matematica esercita sulla mente umana è un fascino paradossale, perché nasce da una indefinibile mescolanza di apollineo e dionisiaco.
Apollinei sono la sua estrema eleganza, la sua incomparabile armonia, il suo rigore cristallino, la sua algida autosufficienza: in una parola, la sua bellezza suprema, perentoria, assoluta, che tanto ha a che fare con la divina bellezza della musica, per esempio con la perfetta simmetria di una toccata e fuga di Bach.
Dionisiaci sono l'inafferrabilità dei suoi oggetti, l'abisso tenebroso del suo altrove, l'evanescenza delle sue verità, l'incomprensibile autoreferenzialità dei suoi postulati: in breve, l'atroce sospetto che si tratti di un mondo umbratile e irreale, che si fa beffe di ogni nostro sforzo per circoscriverlo, per definirlo, per arrivare a comprenderlo veramente.
Avevamo già avuto occasione di riflettere sul paradosso di fondo della matematica, consistente nella costruzione di un mondo di pura logica, rigoroso e autosufficiente, che, pur trovando misteriose corrispondenze nel mondo della natura e pur rivelandosi capace di applicazioni tecniche di una straordinaria efficacia pratica, elude però ogni tentativo di ridurlo al piano della realtà ordinaria e mostra una inquietante propensione a sussistere di vita propria in una dimensione puramente artificiale, se non anche arbitraria (cfr., in particolare, i nostri saggi «Il punto è per Euclide qualcosa di esteso o di inesteso?»; «Bernhard Bolzano e la rinascita della logica formale come dottrina della scienza»; ed «Esiste nel mondo qualcosa di infinito? Tra filosofia e paradossi matematici», tutti consultabili sul sito di Arianna Editrice).
Quello che continuiamo a domandarci, come se lo domandarono alcune delle più grandi menti nella storia del pensiero umano, è se l'universo della matematica costituisca una dimensione parallela rispetto a quella del mondo contingente, nel quale si svolge la nostra esistenza fisica, oppure se la sua impeccabile perfezione tragga origine proprio dal suo carattere formale, ossia dal fatto di essere solo e unicamente un prodotto della nostra mente.
In altre parole: il mondo della matematica è oggettivo o soggettivo? Possiede un suo spessore ontologico, una sua realtà sostanziale, oppure non è altro che una bella, ma fragile astrazione, che, proprio come i sogni, cessa di esistere quando cessa di essere pensata?
Giovanni Vailati e Giuseppe Peano, fra gli altri, si sono appassionatamente interrogati sul mistero della matematica, dal quale erano rimasti stregati; e, benché il grosso pubblico non sia stato coinvolto dalle loro riflessioni - a torto ritenute astruse da un apparato culturale che, in fondo, preferisce discutere le grandi questioni «tra pochi intimi», per un malinteso senso di aristocraticità del sapere - queste ultime costituiscono tuttora uno dei momenti più alti del pensiero contemporaneo, non soltanto italiano, ma mondiale.

Una rapida ma efficace sintesi della teoria delle relazioni e della logica matematica in Giovanni Vailati, Giuseppe Peano e Charles Sanders Peirce è stata tracciata dallo storico della filosofia Carlo Sini (nel volume antologico: «La sfida di Peano», Milano, Spirali Edizioni, che costituisce il n. 1 della rivista «Nominazione», 1980, pp. 72-75), di cui riportiamo qui un breve passaggio, scelto quale punto di partenza per ulteriori riflessioni.

«In un breve scritto del 1904 Vailati ricorda le note e discusse parole di Russell:
"La matematica è una scienza nella quale non si ha mai bisogno di sapere se quello che si dice è vero, e neppure di sapere di che cosa si parla" (G. Vailati, "La più recente definizione della matematica", in "Il metodo della filosofia. Saggi di critica del linguaggio, a cura di F. Rossi-Landi, Laterza, Bari, seconda ediz.1967, p. 121).
Questa frase, dice Vailati, ha tutto l'aspetto di un paradosso e anzi d'un enigma." Egli però ne dimostra in seguito la sensatezza e l'importanza. Qual è dunque, secondo Vailati, il senso e l'importanza delle affermazioni russelliane?
Il senso e l'importanza stanno in ciò: che le costruzioni concettuali della matematica non mirano a essere "più o meno conformi alla realtà", ma mirano invece a identificare relazioni e operazioni meramente possibili e ideali. Questo modo di intendere la matematica, dice Vailati, è stato esemplarmente rappresentato dalla *teoria delle relazioni* di Peirce e dalla *logica matematica* di Peano.
"Un carattere comune all'uno e all'altro di questi due indirizzi è appunto la tendenza a emancipare le deduzioni matematiche da qualunque appello a fatti o intuizioni che si riferiscano al significato delle operazioni, o relazioni, in esse considerate. Queste vengono definite mediante la pura e semplice enunciazione di un certo numero di proprietà fondamentali le quali, potendo essere comuni a relazioni od operazioni aventi i significati più diversi, ed eterogenei, sono compatibili colle più svariate interpretazioni dei simboli che figurano nella loro enunciazione. Dato un gruppo di relazioni od operazioni definite in tal modo, che siano supposte cioè godere d'un certo numero di proprietà arbitrariamente fissate, l'unico scopo che può aver di mira il matematico è quello di determinare di quali altre proprietà esse dovranno o potranno godere in virtù delle supposizioni fatte" (Ibid., pp. 127 sg.).
In che modo dunque procede il matematico rispetto a ciò che il senso comune chiama "realtà"? La matematica, osserva Vailati, è mossa dalla "aspirazione caratteristica a spogliare (o, per esprimere la stessa cosa con una metafora opposta, e forse più appropriata) a vuotare, quanto più può, di ogni significato i segni e le parole di cui si serve. Assai più avanti nella stessa direzione si va procedendo nelle regioni più astratte e speculative del suo dominio" (p. 127). Questo modo di procedere è funzionale, non soltanto agli scopi autonomi della matematica, , ma anche alle esigenze imposte alla matematica dalla sua applicazione "alle scienze fisiche e meccaniche". In questo senso, le ipotesi matematiche
"[…] per quanto suggerite dalle osservazioni o dagli esperimenti, corrispondono a vere deformazioni, o falsificazioni, dei fatti reali, effettuate appunto in vista di rendere lo studio di questi accessibile ai potenti mezzi di cui dispone il calcolo e la rappresentazione geometrica. E tali deformazioni o falsificazioni, ben lungi dall'essere riguardate come degli espedienti eccezionali ai quali sia necessario ricorrere a causa di qualche limitazione inerente all'esercizio delle nostre facoltà intellettuali, sono riconosciute sempre più come condizioni normali e indispensabili di qualsiasi specie di attività razionale. Quel metodo stesso che si chiama delle approssimazioni successive, e che consiste nel correggere gradualmente i risultati di investigazioni teoriche tenendo conto d'un numero sempre crescente di circostanze che complicano il fenomeno da studiare, presuppone come preliminare indispensabile un processo inverso, consistente invece nel semplificare artificiosamente i fatti che si vogliono sottoporre a studio, spogliandoli della più gran parte dei caratteri che essi effettivamente presentano e cercando di determinare come essi dovrebbero comportarsi se essi fossero quali li supponiamo, cioè se fossero diversi da quel che sono. Le ipotesi, che in tal modo vengono a essere costruite, non soltanto non cessano di essere accettabili per il fatto di essere false, ma si presentano al contrario tanto più atte a servire al loro scopo quanto meno esse sono vere, quanto più cioè sono i caratteri che esse riescono a trascurare nella rappresentazione, convenzionale e schematica, che ci danno dei fatti ai quali si riferiscono." (ibid., pp. 122 sg.)
Ciò che abbiamo letto testé chiarisce in modo esemplare in che senso e perché il matematico non debba darsi pena di chiedersi se le sue costruzioni concettuali siano vere o false, conformi più o

meno, o per nulla, alla realtà. L'operazione matematica è un aver a che fare con la realtà, una manipolazione intellettuale che mira ai rapporti e alle operazioni, in quanto modi di essere delle cose, astrazion fatta dagli altri aspetti che le cose pure rivestono per il senso comune.
In secondo luogo Vailati osserva (e qui il suo riferimento a Peano è ancor più diretto) che "la parte più importante ed essenziale del linguaggio matematico" riguarda "segni indicanti relazioni (uguaglianza, disuguaglianza, rapporti di situazione, di direzione, di grandezza, ecc.)", e inoltre "segni esprimenti funzioni ed operazioni". (ibid, p. 126). Il linguaggio della matematica, insomma, si colloca all'estremo opposto rispetto a quei segni che esprimono in modo naturale, immediato e diretto, lo stato d'animo del parlante. Questi segni sono essenzialmente le interiezioni (come, per esempio, il suono "brr" o il suono "sst", che da soli indicano che chi li pronuncia avverte del freddo o chiede silenzio). Come diceva Max Müller, ricorda Vailati, essenzialmente "il linguaggio comincia dove le interiezioni finiscono", sicché "un linguaggio è tanto più perfetto quanto più sono numerose in esso le parole che, per se stesse, non hanno alcun senso" (ibid., p. 125). In altri termini, la lingua, come dirà Saussure, è un sistema formale di segni convenzionali, un sistema di differenze interne. Tuttavia il linguaggio ordinario conserva ancora un riferimento indiretto e mediato con le cose del senso comune. Se noi diciamo: "Il fulmine venne prima del tuono e il tuono prima della pioggia, sicché anche il fulmine venne prima della pioggia", le parole "fulmine", "tuono", "pioggia", sono ancora riconducibili, per esempio in modo ostensivo, alla comune e diretta esperienza. Ma se noi, astraendo dalla frase le relazioni che la compongono, diciamo "A è accaduti prima di B, e B prima di C, sicché anche A è accaduto prima di ", ci avviciniamo a un puro linguaggio logico, che è passibile di ulteriore perfezionamento, se tutte le sue parti vengano tradotte in simboli logico-matematici, ovvero nell'algebra mentale auspicata da Leibniz w realizzata da Peano.
In tal modo Vailati ha chiarito il senso e l'importanza della frase di Russell. Potremmo riassumere così la sua risposta: non esiste un problema di verità o di non verità delle asserzioni matematiche, perché le operazioni e i concetti della matematica non mirano a riprodurre la realtà del senso comune così come essa è; neppure dunque ha senso confrontare quelle operazioni e quei concetti con la realtà comune per trarne un giudizio di verità o di errore. La matematica, piuttosto, tende a trascurare volontariamente tutte le possibili circostanze e tutti i possibili caratteri concreti" delle cose, mira a "svuotare" le cose di tutte le loro "qualità", per restringersi operativamente alle più generali e astratte relazioni: il che equivale, in sede pratica, a rendere le cose accessibili al calcolo. In un secondo luogo, non esiste un problema di sapere "di che cosa parla" il matematico, cioè non ha senso chiedersi quale sia lo statuto ontologico dei simboli, e dei concetti, matematici, perché i segni della matematica sono strumenti volutamente convenzionali; essi possono pertanto costruire, come diceva Peano sulla scorta di Leibniz, una "scrittura universale" di tipo algebrico, il cui oggetto è lo studio delle "proprietà formali delle operazioni e delle relazioni di logica" (G. Peano, "Notazioni di logica matematica", in AA. VV., "L'immagine della scienza. Il dibattito sul significato dell'impresa scientifica nella cultura italiana", a cura di G. Giorello, Il Saggiatore, Milano, 1977, p. 5).»

Come si sarà notato, per Vailati (e per Peano) il problema non è quello, di portata più generale, relativo a definire lo statuto ontologico della matematica: se essa, cioè, costituisca una dimensione a sé stante, simile alle Idee di Platone nell'Iperuranio, oppure se sia solo un universo convenzionale, creato dalla mente umana; e nemmeno quello di appurarne il grado di "verità" (o falsità); bensì, più modestamente, di definire l'ambito della matematica e, dunque, della validità dei suoi procedimenti logici.
E la risposta, come si è visto, è che la matematica non è altro che il regno dei simboli convenzionali, mediante i quali è possibile costruire un linguaggio perfettamente coerente con le premesse date e, pertanto, tale da offrire un esempio impeccabile di logica formale.
Si capisce che una risposta del genere non è di natura tale da soddisfare chi non si accontenti di ragionare solo e unicamente all'interno del linguaggio matematico, ma sia portato - come lo è, per

vocazione, il filosofo - a interrogarsi, sempre e comunque, sul significato ultimo delle cose, e sul loro valore di verità in una dimensione assoluta.
In altre parole: la matematica, così concepita - ossia come una sorta di scrittura universale di tipo algebrico - sarà indubbiamente un bel gioco: ma in che rapporto sta il gioco della matematica con il gioco della realtà effettuale, della vita concreta?
Non si fa questione, naturalmente, delle applicazioni tecniche della matematica, delle quali nessuno può dubitare, dal momento che ne abbiamo quotidianamente sotto gli occhi la straordinaria potenza ed efficacia.
E nemmeno si può dubitare di quella misteriosa, e tuttavia evidente, correlazione che esiste tra il mondo della matematica e quello della natura (la disposizione delle gemme sul ramo di una pianta in accrescimento; le spirali di una conchiglia di "Natutilus"; le distanze dei pianeti dalla stella attorno a cui orbitano; e così via).
Quel che non possiamo fare a meno di domandarci è se la matematica sia paragonabile alla sfera simbolica dell'arte o, magari, della religione, all'interno delle quali tutto ha un senso, ma fuori delle quali tutto è opinabile e contestabile, perfino l'oggetto che esse rappresentano (rispettivamente, la bellezza e la divinità); o se, al contrario, la matematica *pura* - non, quindi, la matematica applicata alla tecnica, o la matematica riscontrabile nell'ordine naturale - sia una realtà autonoma, vivente di vita propria, che si può bensì tradurre in un linguaggio simbolico, ma che non deriva da esso il proprio statuto ontologico.
Peano e Vailati, come si è visto, pur non ponendosi frontalmente un simile «aut-aut», propendevano chiaramente per la prima possibilità; essi vedevano nella matematica un sistema artificiale di segni, il cui significato sarebbe situato totalmente all'interno di essa, e la cui logica rimanda a una dimensione astratta di pensiero puro.
Per il matematico Bernhard Bolzano, come abbiamo visto a suo tempo, le cose non sono così semplici. Egli, infatti, sostiene che l'insieme generale di tutti gli oggetti è composto da due sottoinsiemi: quello degli oggetti reali e quello degli oggetti non-reali. Un oggetto si può definire reale soltanto se fa parte dell'ordine causale del mondo e, in tal senso, si possono definire come oggetti reali sia le sostanze che gli accidenti della metafisica scolastica. Ma la parte più interessante della dottrina della scienza del filosofo praghese è quella relativa al sottoinsieme degli oggetti non-reali. Tale sottoinsieme, a sua volta, risulta costituito da due differenti classi di oggetti: le proposizioni in sé e le rappresentazioni in sé.
La *proposizione in sé* è il puro significato logico di essa, indipendentemente dal suo esser vero o falso: ad esempio, nella proposizione "il cavallo di Napoleone è bianco", la proposizione in sé è il concetto logico che collega Napoleone, il suo cavallo e l'esser bianco di quest'ultimo. Non importa se Napoleone non aveva un cavallo o se esso non era bianco; è sufficiente che la proposizione abbia un senso logico compiuto. Allo stesso modo, non importa se essa venga o non venga espressa mediante parole, diventando così un fatto linguistico; e non importa nemmeno che essa venga pensata o non pensata da qualche soggetto. Essa esiste in se stessa, e il fatto di venire pensata da qualcuno oppure espressa in parole non ne modifica lo statuto ontologico fondamentale: quello, appunto, di oggetto non-reale.
Viceversa, la *rappresentazione in sé* corrisponde alla dimensione oggettiva della rappresentazione, la quale non necessita di alcuna relazione con il soggetto ed è la materia della rappresentazione soggettiva, cioè come atto di un soggetto pensante.
Ora, se una determinata proposizione in sé viene pensata, allora acquista un'esistenza reale e diviene un oggetto reale A quel punto essa acquista una verità soggettiva; tuttavia la materia di cui sono fatte non va confusa con il loro essere pensate, poiché costituisce una verità in sé: Questo vuol dire che le verità in sé sono delle proposizioni valide anche al di fuori del fatto di essere riconosciute, pensate o espresse a parole. Si noti che "oggettivo", per Bolzano, non significa "vero perché esperibile da diversi soggetti", bensì - al contrario - vero perché anteriore, e comunque indipendente, dall'esperibilità di qualsiasi soggetto.

Bolzano, dunque, opponendosi a Kant, ha rivendicato la natura non "reale", e tuttavia oggettiva, degli oggetti della logica e, quindi, anche della matematica.
A sua volta, il filosofo e matematico Friedrich Ludwig Gottlob Frege riteneva che la logica si occupi di due classi di realtà: gli oggetti, che costituiscono degli individui, e i concetti, che formano la rete delle proprietà e delle relazioni tra gli oggetti.
Ora, gli oggetti hanno questo di particolare: che sono concepibili come esistenti indipendentemente dai nostri meccanismi conoscitivi; non dipendono né dai nostri pensieri, né dalle parole con cui li indichiamo. Per esempio, possiamo indicare "il cavallo" anche con espressioni diverse, come "quel mammifero ungulato, dotato di quattro zampe, originario delle steppe dell'Asia Centrale, che è stato addomesticato dall'uomo e utilizzato sia come animale da lavoro, sia come mezzo di trasporto per uomini e merci, sia anche per competizioni sportive e che, per la sua bellezza ed eleganza, è stato celebrato da innumerevoli poeti, pittori, scultori, ecc.". Invece i concetti sono strettamente vincolati alle forme del linguaggio ed è, quindi, ben difficile concepirli come esistenti in sé stessi, al di fuori delle nostre strutture conoscitive.
Sulla scorta di queste indicazioni, possiamo intravedere una possibile risposta al quesito che ci eravamo inizialmente posto circa lo statuto ontologico degli oggetti della matematica, in una direzione sostanzialistica e, comunque, non meramente psicologistica.
Gli enti matematici in se stessi, e le operazioni di cui sono passibili, così come le proposizioni della logica, non sono forse oggetti «reali», se per «reale» si intende qualche cosa che esiste nella dimensione della realtà effettuale; ma sono certamente «oggettivi», nel senso che possono essere benissimo immaginati come indipendenti dall'attività del soggetto pensante. In altre parole, un triangolo rettangolo è concepibile in sé e per sé, anche se nessuna mente lo sta pensando in un dato momento. Però, se una o più menti lo pensano, allora esso diviene il contenuto di un pensiero attuale e, di conseguenza, acquista un'esistenza reale nel mondo effettuale, esattamente come qualunque altro contenuto di pensiero.
Quanto poi alla domanda se gli enti matematici in se stessi siano reali, nel senso di effettuali, la risposta più corretta sarebbe forse quella di riconoscere che decidere una tale questione esorbita, per sua stessa natura, dalle possibilità della mente umana. Secondo Frege, tuttavia, dovremmo distinguere fra oggetti e concetti: i primi esistenti in sé stessi, i secondi legati alle forme del linguaggio in cui vengono espressi.
Se prendiamo per valida questa distinzione, allora potremmo ipotizzare, pur con tutte le cautele del caso, che gli enti matematici esistono in se stessi, mentre i postulati, i teoremi e i corollari, nei quali sono sviluppate le loro proprietà e relazioni, dipendono dal linguaggio simbolico della matematica e, quindi, non vivono di vita propria, senza un soggetto pensante che li ponga. In altri termini, il triangolo rettangolo esiste in sé stesso, non solo come oggetto del pensiero, ma come realtà oggettiva e reale; mentre il teorema di Pitagora, che pure si riferisce a quel medesimo triangolo, sviluppandone alcune proprietà intrinseche, non esiste in se stesso, ma solo nel sistema di logica formale che lo riconosce e lo formula.
L'uno è un oggetto, il secondo un concetto: e mentre gli oggetti appartengono alla dimensione della realtà (non necessariamente, è chiaro, alla dimensione della realtà fisica), i concetti appartengono solo e unicamente alla dimensione della logica, ossia della possibilità ideale.
Con questo non si vuol dire che, se un triangolo rettangolo non è pensato da alcuno, le proprietà da cui scaturisce il teorema di Pitagora sono, per così dire, sospese o, magari, annullate; ma, semplicemente, che il teorema di Pitagora non è pensabile senza una mente che lo pensi, mentre il triangolo stesso, al contrario, lo è. È pensabile, ad esempio, una triangolazione Terra-Luna-Sole, dunque è pensabile un triangolo cosmico, anche se nel Sistema solare non esistesse alcuna mente pensante; pensabile, s'intende, dal pensiero in quanto tale, ossia dal pensiero che faccia astrazione da un atto specifico di un determinato soggetto pensante.
Ché se, poi, si volesse obiettare che già questa è una convenzione arbitraria, perché nulla è pensabile al di fuori del pensiero stesso, dal momento che solo per mezzo di esso noi siamo in grado di rappresentarci la realtà: a questa obiezione non avremmo nulla da rispondere, se non che il

pensiero, ossia la filosofia, trova la sua ragion d'essere proprio nel continuo sforzo di trascendersi, ossia di pervenire a un contenuto di verità che sia indipendente dal pensiero del soggetto pensante.
Per cui, parlando propriamente, dovremmo chiudere ogni discorso affermando che, della realtà, solo Dio può avere conoscenza, mentre alle menti finite non è concessa altra sorte che quella di brancolare nel buio
E, se questo fosse un richiamo alla necessaria umiltà speculativa allorché ci sforziamo di avvicinarci ad una verità permanente e assoluta, della quale sentiamo di aver bisogno ma che sappiamo di non poter mai raggiungere pienamente, allora noi accoglieremmo un tale richiamo con gratitudine e con animo sereno, perché esso ci ricorda in modo salutare la nostra condizione ontologica di creature sospese tra due misteri: quello del relativo e quello dell'Assoluto.